2. Динамические системы

Постановка задачи

В широком смысле динамическими системами принято называть математические модели, описывающие временную эволюцию систем, поведение которых однозначно определяется начальными условиями. В данном курсе вычислительной физики мы ограничимся моделями, которые сводятся к решению задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Эти дифференциальные уравнения содержат производные по аргументу *t*, то есть времени, и, например, описывают динамику во времени различных физических параметров. В общем случае такую систему уравнений можно записать в векторном виде

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = \vec{M}(t, X_1, X_2, ...), \tag{2.1}$$

где $\vec{X} = (X_1, X_2, ...)$ – символический вектор, составленный из неизвестных функций. При решении этой системы используются различные численные методы, рассмотренные в предыдущем разделе или приведенные в приложении.

Пример – одномерный осциллятор.

Рассмотрим задачу об одномерных колебаниях частицы под действием потенциальной силы $F(x)$ для случая, когда потенциальная энергия $U(x)$ имеет хотя бы один минимум. Добавим также силу сопротивления и внешнюю вынуждающую периодическую силу. Уравнения движения такой частицы будет иметь вид:

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \tag{2.2}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) - \alpha \cdot v + A\sin(\omega t), \tag{2.3}$$

где $F(x) = -\dfrac{dU(x)}{dx}$.

Пусть один из минимумов потенциальной энергии $U(x)$ находится в точке $x = 0$, причем функция $U(x)$ представима в виде:

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + ... \tag{2.4}$$

Для силы Гука $F(x) = -k \cdot x$ (линейный осциллятор) зависимости от времени решения уравнений (2.2), (2.3) при различных комбинациях параметров приведены на рис. 2.1. Представлены следующие случаи:

а) α>0, A=0 — затухающие колебания линейного осциллятора при отсутствии вынуждающей силы.

б) α>0, A≠0 — вынужденные колебания осциллятора под действием внешней синусоидальной силы.

Также на рис. 2.1 представлено решение аналогичной задачи для нелинейных колебаний в потенциале с двумя несимметричными минимумами: $U(x) = 0.5x^2 - 0.3x^3 + 0.04x^4$:

в) α=0, A=0 — нелинейные собственные колебания.

г) α=0, A≠0 — Вынужденные колебания нелинейного осциллятора под действием внешней синусоидальной силы.

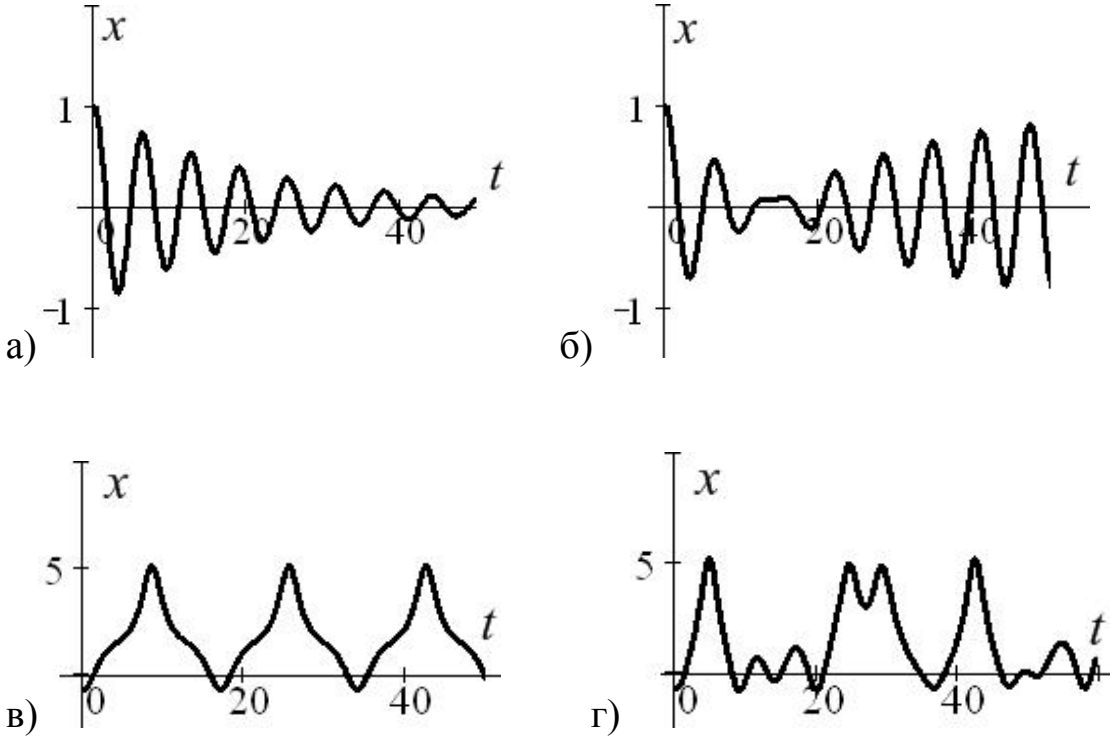

Рис. 2.1. Решение уравнений (2.2; 2.3) для случаев:
а) затухающие колебания линейного осциллятора,
б) вынужденные колебания линейного осциллятора,
в) собственные нелинейные колебания,
г) вынужденные нелинейные колебания

Временное представление решения обладает тем недостатком, что на таком графике мы видим решение на ограниченном временном интервале и не можем проследить историю системы в целом.

Фазовые траектории

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений часто удобнее изображать не в привычном виде, как зависимости неизвестных функций от времени (см. рис. 2.1), а в ***фазовом***

пространстве. В этом случае по осям откладываются значения самих найденных функций. Например, для уравнения (2.1) мы строим зависимость скорости от координаты (рис. 2.2), то есть зависимость $v(t)$ от $x(t)$, где $v(t) = dx/dt$. Поскольку переменная t теперь не входит в графики явно, появляется возможность проследить глобальную временную эволюцию системы, особенно если такое движение финитно.

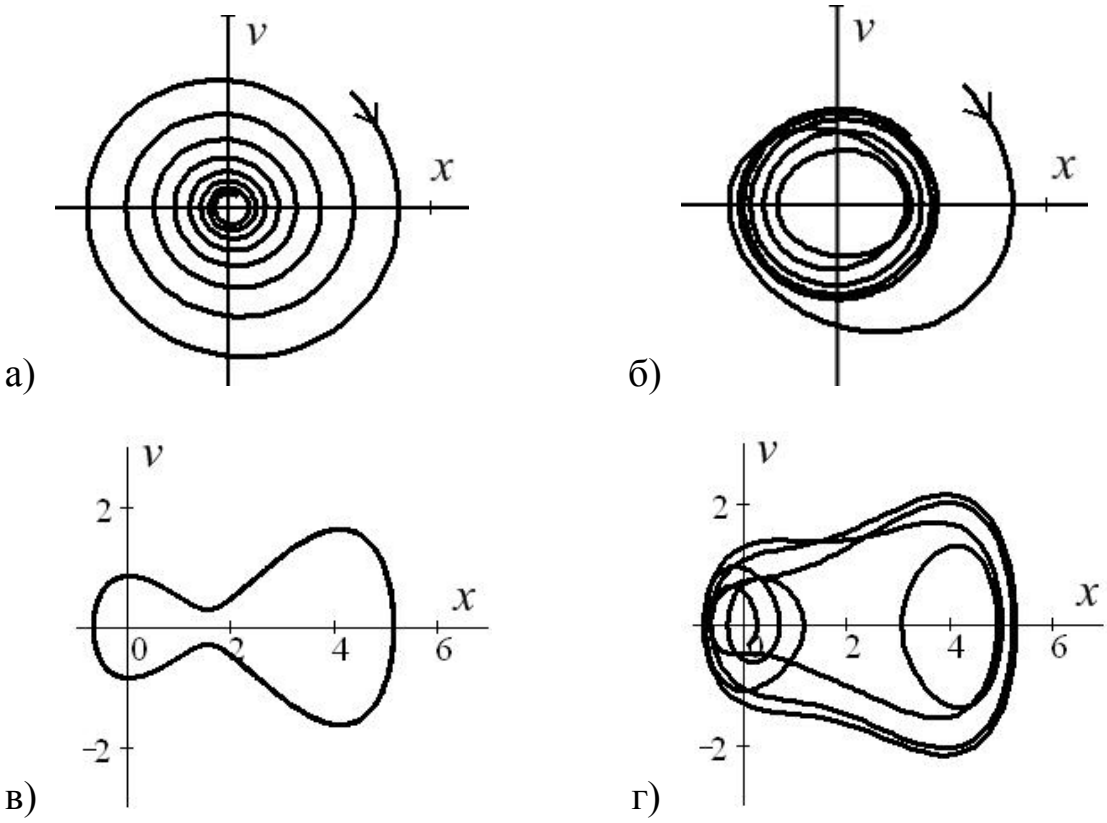

Рис. 2.2. Фазовые траектории для уравнений (2.2; 2.3):
а) затухающие колебания,
б) вынужденные колебания с учетом затухания,
в) собственные нелинейные колебания,
г) вынужденные нелинейные колебания

В случае осциллятора (или любых двух ОДУ) такой график – фазовый портрет системы – является кривой на фазовой плоскости и поэтому особенно нагляден. В общем случае, если система состоит из N уравнений, то фазовое пространство является N-мерным. При $N>2$ наглядность теряется и приходится строить различные проекции фазового портрета.

Особые точки фазового пространства

Исследование правой части ОДУ, описывающих поведение динамической системы,

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = \vec{M}(X_1, X_2,..., X_N), \qquad (2.5)$$

позволяет предсказать качественное поведение траекторий. В первую очередь следует найти так называемые неподвижные точки, то есть значения неизвестных функций $X_i(t)$, при которых правая часть системы уравнений (2.5) обращается в ноль. Обозначим их через X_{0i}, то есть $\vec{M}(X_{01}, X_{02},...) = 0$. Для линейного осциллятора неподвижной точкой будет, очевидно, точка $x(t)=0$, $v(t)=0$.

Поведение фазовых траекторий вблизи неподвижной точки можно получить, если слегка «отодвинуться» от неё, то есть представить решение виде $X_i(t)= X_{0i} +\Delta X_i(t)$. Считая $\Delta X_i(t)$ малой добавкой, систему уравнений можно линеаризовать, то есть представить в виде

$$\frac{d}{dt}\Delta X_i = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial X_j} M_i(X_{01}, X_{02},...X_{0N})\cdot \Delta X_j. \qquad (2.6)$$

Поскольку теперь правая часть системы ОДУ линейно зависит от неизвестных функций – она имеет точное решение. Это решение имеет вид линейной комбинации экспонент, показатели которых являются собственными числами матрицы производных, умноженными на t.

Для случая N=2 поведение фазовых траекторий вблизи различных типов неподвижных точек представлено на рис. 2.3.

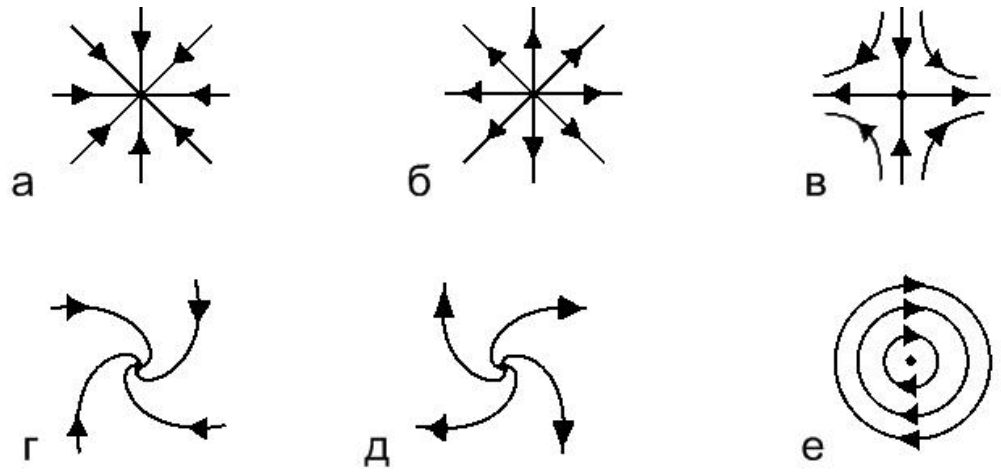

Рис. 2.3. Типы особых точек фазового пространства:
а) притягивающая, б) отталкивающая, в) седло, г) притягивающий фокус, д) отталкивающий фокус, е) цикл

Проиллюстрируем поведение траекторий, управляемое неподвижными точками, на классической модели математической экологии, известной как модель «хищник-жертва». Эта модель

описывает динамику взаимодействующих биологических популяций (модель Вольтерра – Лотки). Кроме того, она используется и в других ситуациях, в частности в некоторых экономических моделях.

Пусть два биологических вида совместно обитают в изолированной среде. Среда стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который будем называть «жертвой». Другой вид – «хищник» – также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида. Для определённости назовем их львами и антилопами, численность львов будем обозначать $L(t)$ а антилоп – $A(t)$. Дифференциальные уравнения, описывающие такую модель, имеют вид:

$$\frac{dA}{dt} = A \cdot (q_1 - q_2 \cdot L). \qquad \frac{dL}{dt} = L \cdot (q_3 \cdot A - q_4). \qquad (2.7)$$

При отсутствии львов, очевидно, численность антилоп возрастала бы экспоненциально. При отсутствии антилоп численность львов стремится к нулю.

На рисунке 2.4 изображены два способа представления решения уравнений (2.7). Левый график – зависимость $A(t)$ и $L(t)$ от t, ему соответствует внешняя (жирная) линия на правом.

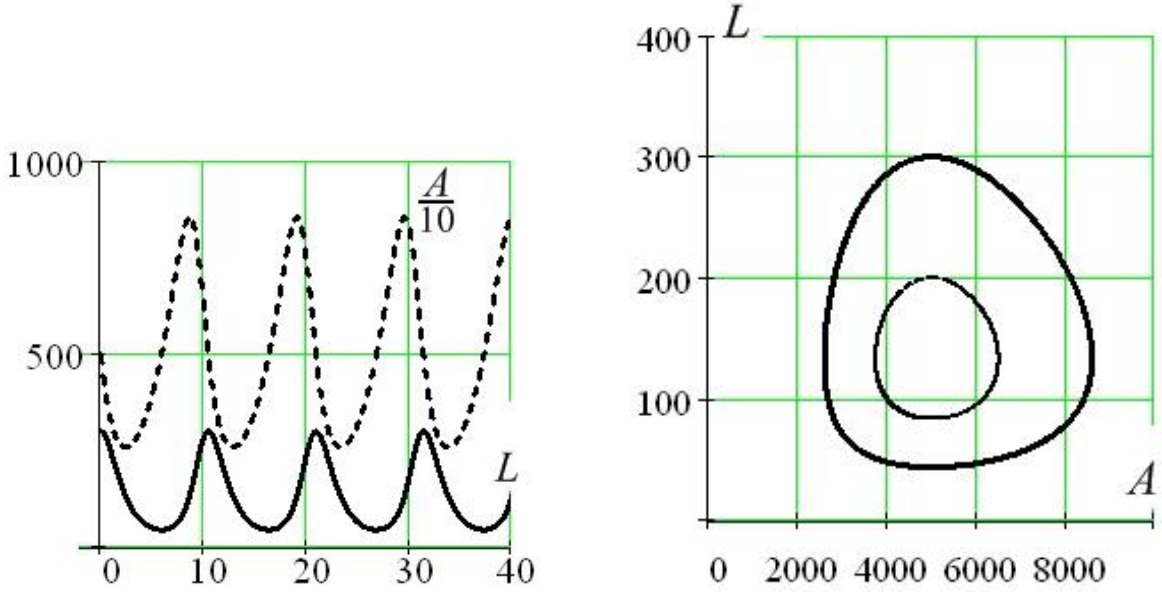

Рис. 2.4. Модель «хищник-жертва».
Временное представление решения (слева) и представление решения в фазовом пространстве (справа)

Эта система имеет равновесное состояние, когда число антилоп и львов постоянно. Отклонение от этого состояния приводит к колебаниям численности антилоп и львов, аналогичным колебаниям гармонического осциллятора.

Уравнения (2.7) имеют две неподвижные точки:

1) $A_1 = 0$, $L_1 = 0$,

2) $A_2 = q_4/q_3$, $L_2 = q_1/q_2$.

Первая точка является седлом, вторая – циклом. В интересующей нас части фазового пространства (A>0. L>0) глобальное поведение системы полностью определяется этими двумя точками.

Вблизи цикла вокруг точки (A_2, L_2) траектории представляют из себя замкнутые кривые, вложенные друг в друга. Если начальное значение выбрано так, что L велико, а A – мало, то траектория, «прижимаясь» к вертикальной оси, стремится к седловой точке (A_1, L_1), а, подойдя к ней, круто поворачивает и уходит от нее, прижимаясь к горизонтальной оси (сравни с рис. 2.3(в)). Но все равно и эта траектория остается частью гигантского цикла.

Аттра́кторы

Аттрактором принято называть множество точек в фазовом пространстве, к которому стремятся траектории динамической системы при стремлении времени к бесконечности.

Простейшим случаем аттрактора является точка (см. рис. 2.2(а)). Аттракторами могут быть кривые, а также произвольные сложные подмножества точек фазового пространства. Примером динамической системы с аттрактором-точкой является затухающий осциллятор. Вынужденные колебания гармонического осциллятора демонстрируют другой тип аттрактора – предельный цикл, который описывает установившиеся колебания (рис. 2.2(б)). Известно, что для такого осциллятора сначала решение является суперпозицией собственных затухающих и вынужденных колебаний, а затем оно асимптотически стремится к колебаниям с частотой вынуждающей силы.

Аттракторы бывают регулярными и нерегулярными. Регулярными аттракторами принято считать:

- устойчивые особые точки,
- устойчивые предельные циклы,
- устойчивые инвариантные торы.

Аттракторы-точки появляется в диссипативных физических системах и соответствуют нулевому значению скорости и локальному минимуму потенциальной энергии (пример – затухающий осциллятор).

Предельными циклами являются замкнутые кривые, к которым асимптотически стремятся траектории системы при стремлении времени к бесконечности. Малое отклонение от траектории цикла

приводит к траектории, которая со временем сколь угодно мало отклоняется от траектории цикла.

Доказано, что дифференциальные уравнения на плоскости могут иметь только регулярные аттракторы первых двух типов (особые точки и предельные циклы). Дифференциальные уравнения в многомерных фазовых пространствах (начиная с трёхмерных) могут иметь нерегулярные или «странные» аттракторы.

Странный аттрактор представляет из себя некоторую ограниченную область в фазовом пространстве, куда стремятся траектории системы. Но при этом он состоит из бесконечного числа неустойчивых циклов разных периодов и множества апериодических точек.

Странные аттракторы часто демонстрируют квазихаотическое поведение, когда прогнозирование траектории, попавшей в аттрактор, затруднено, поскольку малая неточность в начальных данных через некоторое время может привести к сильному расхождению прогноза с реальной траекторией. Непредсказуемость траектории в детерминированных динамических системах называют динамическим хаосом (отличая его от стохастического хаоса).

Это явление также называют «эффектом бабочки». Например, слабое возмущение потоков воздуха в одной точке планеты гипотетически может вызвать мощное торнадо в другой точке (вследствие многократного усиления в атмосфере за время распространения).

Одним из наиболее известных странных аттракторов является аттрактор Лоренца, который описывается системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot (y - x) \qquad \frac{dy}{dt} = x \cdot (B - z) - y \qquad \frac{dz}{dt} = x \cdot y - D \cdot z \qquad (2.8)$$

Система демонстрирует хаотическое поведение при определённых значениях параметров, например при A=10, B=28, D=8/3.