

3. Применение рядов Фурье для расчета цепей переменного тока

Представление функций рядами Фурье

Рассмотрим произвольную периодическую функцию $y(t)$, имеющую период T (т.е. $y(t) = y(t+T)$ для любого t). Представление непрерывной периодической функции $y(t)$ в виде ряда Фурье имеет вид

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)], \quad (3.1)$$

где $\omega = 2\pi/T$, а коэффициенты a_n, b_n (спектр) для $n > 0$ определяются формулами:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(n\omega t) dt, \quad (3.2)$$

a_0 – есть среднее значение функции $y(t)$ за период.

Фактически, спектр сигнала является функцией от $n\omega$, то есть

$$a_n = a(n\omega); \quad b_n = b(n\omega). \quad (3.3)$$

Такое обозначение удобно при переходе от дискретного спектра к непрерывному, позволяющему получить представление Фурье для непериодических функций (в виде интеграла Фурье).

Дифференцирование и интегрирование функции, заданной рядом Фурье, можно свести к преобразованию спектра.

Исходный спектр	Дифференцирование	Интегрирование
a_n	$n\omega \cdot b_n$	$-b_n/(n\omega)$
b_n	$-n\omega \cdot a_n$	$a_n/(n\omega)$

Первая строка есть коэффициенты при косинусах, а вторая – при синусах в исходном ряде и рядах Фурье для производной и первообразной. Формулы для интегрирования следует использовать без постоянной составляющей.

В качестве примера вычислим спектр прямоугольного сигнала. Прямоугольный сигнал – это периодическая функция, которая в пределах своего периода принимает два фиксированных значения (см. рис. 3.1).

Формально, прямоугольный сигнал не является непрерывной функцией. Конечные отрезки ряда Фурье для разрывных функций дают неверное значение в точках скачка при стремлении числа членов

к бесконечности, но вне этих точек проблем не возникает. Однако это не мешает приводить спектр прямоугольного сигнала в любом математическом справочнике.

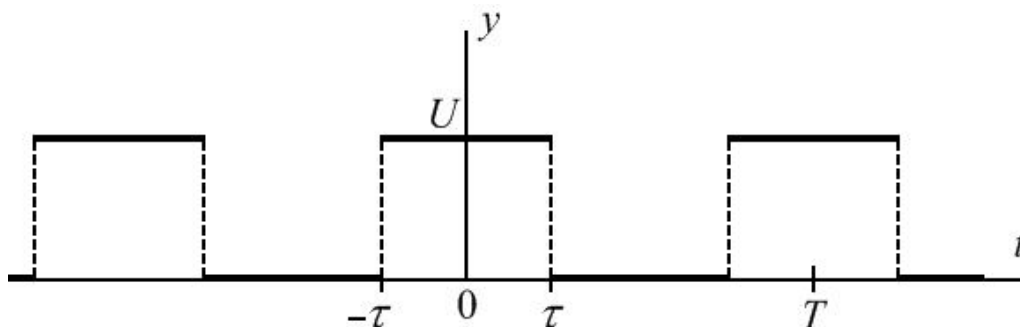


Рис. 3.1. Прямоугольный сигнал

Пусть максимальное значение сигнала равно U , а минимальное – нулю, длительность импульса будем обозначать 2τ . Длительность импульса – это время, в течение которого значение сигнала равно U . За начало отсчета $t=0$ выберем середину одного из импульсов. В этом случае сигнал будет строго симметричным, т.е. $y(t)=y(-t)$. Поскольку синус антисимметричная функция, имеем $b_n=0$. Среднее значение за период дает $a_0 = \frac{2\tau}{T}U$. Для коэффициентов a_n получаем:

$$a_n = \frac{2U}{T} \cdot \int_{-\tau}^{\tau} \cos(n\omega t) dt = \frac{2U}{\pi \cdot n} \cdot \sin(n\omega \tau). \quad (3.4)$$

Суммирование ряда Фурье с таким спектром при достаточно большом числе членов N дает функцию, график которой соответствует рис. 3.1, но содержит небольшие пики в точках скачков функции. Эти пики вблизи скачков иллюстрируют упомянутую особенность поведения ряда в точках разрыва, их ширина стремится к нулю при стремлении к бесконечности числа суммируемых членов ряда N .

Код программы для данного примера имеет очень простой вид

1. program furie;
2. uses graph,crt;
3. var
4. gm,gd,xx,yy,x0,y0,i,j,N:integer;
5. y,a0,t,dτ,U,w,x:real;
6. a,b:array[1..200] of real;
7. BEGIN
8. Initgraph(gm,gd,"");

```

9. x0:=10; y0:=210; N:=100;
10. line(x0,y0,600,y0); line(x0,0,x0,y0);
11. w:=1; tau:=0.7; U:=20; a0:=U*w*tau/Pi;
12. for i:=1 to N do
13. begin
14. a[i]:=2*U/Pi*sin(i*w*tau)/i;
15. b[i]:=0;
16. end;
17. dt:=0.01; t:=0;
18. while t<25 do
19. begin
20. y:=a0;
21. for i:=1 to N do y:=y+a[i]*cos(i*w*t)+b[i]*sin(i*w*t);
22. t:=t+dt;
23. xx:=x0+round(20*t); yy:=y0-round(y);
24. putpixel(xx,yy,10);
25. end;
26. readln;
27. END.

```

Спектр сигнала удобно задавать в виде массивов a, b , элементы которых определяются по справочным формулам в начале программы (строки 12 – 16).

Для каждого значения переменной t с шагом dt в цикле по времени (строки 18 – 25) выполняется суммирование ряда Фурье – строка 21. При этом используются заранее определенные коэффициенты спектра. Важно не забыть строчку 20, чтобы перед каждым новым суммированием правильно задавать начальное значение переменной y ($y:=a0$).

Одной из задач количественной обработки экспериментальных данных является так называемый Фурье-анализ, то есть определение спектра экспериментальных зависимостей. При этом независимой переменной не обязательно является время, а Фурье представление может быть многомерным. Например, это может быть определение периодических компонент функции профиля поверхности, полученной методом сканирующей зондовой микроскопии. В этом случае используются специальные методы численного нахождения спектра. В пакете MathCAD для этого имеются несколько методов, использующих алгоритм быстрого преобразования Фурье – fast Fourier transform (FFT). Особенностью задачи является наличие неопределённости в найденном спектре, связанной с тем, что приходится анализировать полученные сигналы на ограниченном интервале.

Преобразование Фурье хорошо выделяет глобальные периодические составляющие, покрывающие большую часть области определения исследуемой функции $y(t)$. Вместе с тем, оно нечувствительно к локальному поведению функции $y(t)$, в частности оно не позволяет исследовать функции, состоящие из периодических фрагментов с различными периодами. Для решения таких задач было придумано «оконное» преобразование Фурье. Основная идея этого метода состоит в многократном вычислении Фурье спектров в пределах набора «окон», выделяющих отдельные фрагменты функции. Для некоторой непериодической функции $y(t)$ оно имеет вид (сравни с (3.2), (3.3))

$$a(\omega, \xi) = \int y(t)\Phi(t - \xi) \cos(\omega t) dt. \quad (3.5)$$

$$b(\omega, \xi) = \int y(t)\Phi(t - \xi) \sin(\omega t) dt. \quad (3.6)$$

Здесь $\Phi(t)$ – так называемая «оконная функция». Она выделяет фрагмент исследуемой функции, ограниченный размерами «окна». $\Phi(t)$ имеет максимум при $t = 0$ и быстро убывает, если модуль аргумента много больше «ширины окна» (например гауссова функция, окна Хемминга, Ханна или Кайзера).

В отличие от обычного преобразования Фурье мы получаем зависимость коэффициентов Фурье (спектра) также и от пространственной координаты, то есть что-то вроде локального Фурье-анализа. При этом графики $a(\omega, \xi)$, $b(\omega, \xi)$ демонстрируют, как коэффициенты Фурье «привязаны» к каждой области пространства. Проблемой данного метода является невозможность одновременного точного определения периода фрагмента и его местоположения (на оси t), эта проблема связана с фиксированным размером «окна». Данное математическое ограничение эквивалентно соотношению неопределенности Гейзенберга для координаты и импульса.

Переменный ток в линейных электрических цепях

Рассмотрим задачу о прохождении периодического электрического сигнала через цепь, содержащую только линейные элементы (сопротивления, катушки и конденсаторы). Пусть внешнее напряжение $U(t)$, поданное на эту цепь, является произвольной периодической функцией с заданным спектром a_n , b_n , а её ряд Фурье имеет вид:

$$U(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)], \quad (3.7)$$

где $\omega = 2\pi/T$.

Очень важно, что каждое слагаемое в ряду Фурье для входного сигнала имеет вид синусоидальной функции с частотой $n\omega$. Именно по этой причине рядами Фурье удобно пользоваться при расчете токов и напряжений в линейных электрических цепях.

Во-первых, хорошо известно, что для линейных электрических цепей синусоидальное внешнее напряжение порождает в этих цепях синусоидальные токи и напряжения той же частоты. При этом амплитуды токов и напряжений, а также соответствующие им сдвиги фаз могут быть легко вычислены.

Во-вторых, в линейных электрических цепях (и вообще в линейных системах) справедлив принцип суперпозиции – линейной комбинации внешних сигналов соответствует такая же линейная комбинация откликов на каждый парциальный сигнал. В частности, входное напряжение вида $U(t) = \alpha_1 \cdot U_1(t) + \alpha_2 \cdot U_2(t) + \dots$ порождает в выбранном нами элементе цепи ток $I(t) = \alpha_1 \cdot I_1(t) + \alpha_2 \cdot I_2(t) + \dots$, причем $I_i(t)$ – это ток для случая, когда входное напряжение равно $U_i(t)$.

Поэтому алгоритм расчета отклика заданной линейной цепи на произвольное входное напряжение очевиден:

1. Найти спектр сигнала, то есть амплитуды всех синусоидальных составляющих (гармоник) с частотами $n\omega$.
2. Вычислить, как преобразуется произвольный входной синусоидальный сигнал данной цепью (например, методом комплексных амплитуд).
3. Сложить результат преобразования всех составляющих сигнала.

Метод комплексных амплитуд является наиболее удобным способом выполнения второго пункта этого алгоритма. В нем используется представление комплексной экспоненты в виде

$$e^{i\omega t} \equiv \exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t).$$

При этом вместо вещественных токов и напряжений используются их комплексные аналоги. Например, если ток в каком то элементе цепи имеет вид $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, то ему сопоставляется комплексный ток $I_1(t) = I_{10} \cdot \exp(i\omega t)$, где неизвестная постоянная I_{10} имеет смысл комплексной амплитуды тока. Очевидно, что $I_{10} = |I_{10}| \cdot \exp(i\varphi)$, причем фаза φ становится аргументом комплексного числа I_{10} , а амплитуда реального тока совпадает с модулем комплексной амплитуды тока $I_0 = |I_{10}|$.

В методе комплексных амплитуд элементам реальной цепи (сопротивлениям, индуктивностям и ёмкостям) сопоставляются их комплексные аналоги – импедансы (комплексные сопротивления). С помощью импедансов рассчитываются комплексные амплитуды тока и напряжения с использованием формул, обобщающих закон Ома и правила Кирхгофа.

Импедансы участков цепи вычисляются напрямую, тем же способом, что и для обычных сопротивлений, то есть однозначно определяются по схеме соединения элементов. Для этого сначала базовым элементам цепи сопоставляются зависящие от частоты комплексные величины Z_j (комплексные сопротивления) по следующему правилу:

- 1) активному сопротивлению R сопоставляется импеданс $Z_R = R$,
- 2) емкости C сопоставляется импеданс $Z_C = 1/(i\omega C) = -i X_C$,
- 3) индуктивности L сопоставляется импеданс $Z_L = i\omega L = i X_L$.

После этого импеданс любого участка цепи для заданной частоты ω вычисляется по правилам вычисления сопротивления такого же участка в цепи постоянного тока с последующей заменой всех сопротивлений, составляющих цепь, их комплексными аналогами.

Комплексные амплитуды токов и напряжений для заданной частоты ω также рассчитываются по правилам вычисления токов и напряжений в аналогичной цепи постоянного тока. Например, сначала составляются уравнения Кирхгофа, в которых все сопротивления, токи и напряжения принимаются вещественными, после чего сопротивления заменяются соответствующими импедансами, а неизвестные токи и напряжения считаются комплексными.

Комплексный ток в произвольном j -том участке цепи всегда имеет вид $I_j(t) = I_{0j} \cdot \exp(i\omega t)$. Реальный (физический) ток для входного напряжения вида $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ будет выражаться через его мнимую часть по формуле $I_j(t) = \text{Im}(I_j(t))$. Очевидно, что если входное напряжение имеет вид $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$, то надо брать реальную часть комплексного тока $I_j(t) = \text{Re}(I_j(t))$.

Таким образом, реальный ток для первого варианта входного напряжения получается по формуле

$$I_j(t) = \text{Im}[I_{0j} \cdot \exp(i\omega t)] = \text{Im}[|I_{0j}| \cdot \exp(i\omega t + i\varphi_j)] = |I_{0j}| \cdot \sin(\omega t + \varphi_j) \quad (3.8)$$

Проиллюстрируем метод комплексных амплитуд на примере последовательного колебательного контура (рис. 3.2):

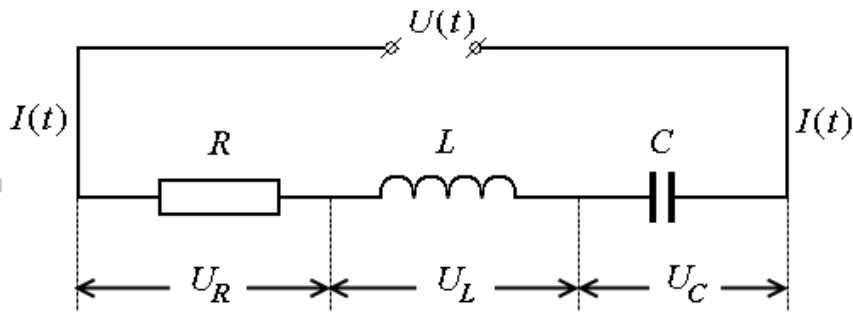


Рис. 3.2. Последовательный колебательный контур

Рассматриваемая цепь состоит из трех последовательно соединенных элементов, поэтому, по правилу последовательного соединения сопротивлений, полный импеданс равен сумме импедансов отдельных элементов: $Z = Z_R + Z_L + Z_C$. Подставляя в это выражение импедансы сопротивления, конденсатора и катушки, получаем выражение для Z :

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}. \quad (3.9)$$

Согласно методу комплексных амплитуд, амплитуды тока и напряжения связаны соотношением

$$I_{10} = \frac{U_0}{Z}. \quad (3.10)$$

Получим теперь явное выражение для физического тока, то есть для $I(t)$. Сначала представим импеданс в экспоненциальной форме:

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| \cdot \exp(i\psi) = |Z| \cdot (\cos\psi + i\sin\psi). \quad (3.11)$$

Здесь $|Z|$ модуль, а ψ – аргумент комплексного числа Z . По правилам вычисления модуля и аргумента комплексных чисел имеем:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \omega^{-2}L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad (3.12)$$

$$\operatorname{tg}(\psi) = (X_L - X_C)/R = (\omega L - 1/(\omega C))/R,$$

где $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Таким образом, комплексная амплитуда тока представима в виде:

$$I_{10} = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{|Z|} \cdot \exp(-i\psi). \quad (3.13)$$

Для входного напряжения $U(t) = U_0 \cdot \sin\omega t$ мы должны взять мнимую часть полученного решения (так как $U(t) = \operatorname{Im}(U_0 \cdot \exp(i\omega t))$):

$$I(t) = \text{Im}(I_{10} \cdot \exp(i\omega t)) = \text{Im}\left(\frac{U_0}{|Z|} \cdot \exp(-i\psi + i\omega t)\right) = \frac{U_0}{|Z|} \cdot \sin(\omega t - \psi). \quad (3.14)$$

Окончательно получаем:

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.15)$$

где амплитуда тока и сдвиг фаз между поданным напряжением и током определены соотношениями:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^{-2}L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (3.16)$$

$$\varphi = -\text{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right).$$

Здесь величина ω_0 – собственная частота колебаний: $\omega_0^2 = 1/(LC)$, φ – сдвиг фаз между приложенным напряжением $U(t)$ и током.

Для применения метода комплексных амплитуд удобно представить ряд Фурье (3.7) для входного напряжения в виде:

$$U(t) = \text{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \exp(in\omega t)\right]. \quad (3.17)$$

Здесь $u_n = a_n - ib_n$ и $u_0 = a_0$. Для сигнала, представленного подобным рядом, достаточно получить в общем виде вклад в ток через интересующий нас элемент от произвольного слагаемого $u_n \cdot \exp(in\omega t)$.

Обозначим через I_n комплексную амплитуду тока через данный участок цепи для входного напряжения вида $u_n \cdot \exp(in\omega t)$. Зависящий от времени парциальный ток, очевидно, имеет вид $I_n \cdot \exp(in\omega t)$, настоящий ток является реальной частью этого выражения. Амплитуда тока I_n определяется из уравнений Кирхгофа для рассматриваемой цепи, причем $I_n \sim u_n$. После этого остается суммировать вклады всех парциальных токов (для всех значений n) – это даст полный ток на данном участке.

При вычислении напряжения на участке цепи с импедансом Z необходимо найти для каждой составляющей соответствующую ей амплитуду напряжения $U(n\omega)$. Согласно методу комплексных амплитуд для гармоник частоты $n\omega$ амплитуда напряжения равна произведению амплитуды тока на импеданс Z , взятый при частоте $n\omega$,

то есть $U(n\omega) = Z(n\omega) \cdot I_n$. Полное напряжение на этом участке находится по формуле:

$$U_Z(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} U(n\omega) \cdot \exp(in\omega t) \right]. \quad (3.18)$$

Очевидно, общая формула для результирующих токов или напряжений будет также иметь вид рядов Фурье, но с другими коэффициентами. Таким образом, нахождение отклика на внешний сигнал в линейных системах сводится к преобразованию спектра. В данном случае у преобразованного сигнала (для ряда типа (3.17)) спектр u_n заменится на $U(n\omega)$. Соответственно для вещественного ряда Фурье типа (3.7) спектр a_n, b_n заменится на

$$A_n = \operatorname{Re}[U(n\omega)], \quad B_n = -\operatorname{Im}[U(n\omega)].$$

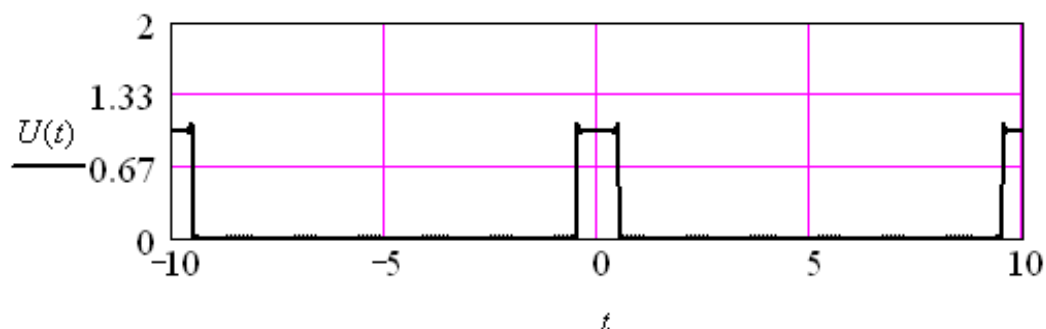
На примере колебательного контура описанный выше алгоритм демонстрируется ниже в формате документа MathCAD (с текстовыми вставками). Входное напряжение – прямоугольные импульсы.

$$T:=10 \quad x:=0.1 \quad N:=200 \quad \omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad n:=1 .. N$$

$$\text{Спектр входного сигнала: } a_n := \frac{2 \cdot \sin(\pi \cdot n \cdot x)}{\pi \cdot n} \quad a_0 := 0 \quad b_n := 0$$

Ряд Фурье для входного сигнала.

$$U(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t))$$



$$\text{Параметры колебательного контура: } R:=0.015 \quad L:=0.01 \quad C:=0.4$$

$$\text{Импедансы: } ZR(\omega) := R \quad ZL(\omega) := i \cdot \omega \cdot L \quad ZC(\omega) = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C}$$

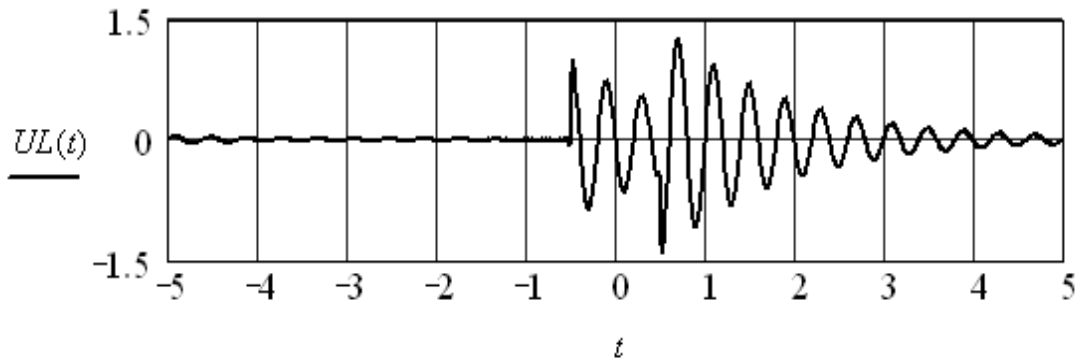
Амплитуды парциальных токов:

$$u_n := a_n - i \cdot b_n \qquad I_n := \frac{u_n}{(Z_R(n \cdot \omega) + Z_L(n \cdot \omega) + Z_C(n \cdot \omega))}$$

Напряжение на катушке индуктивности:

$$A_n := \operatorname{Re}(I_n \cdot Z_L(n \cdot \omega)) \qquad B_n := -\operatorname{Im}(I_n \cdot Z_L(n \cdot \omega)) \qquad A_0 := 0$$

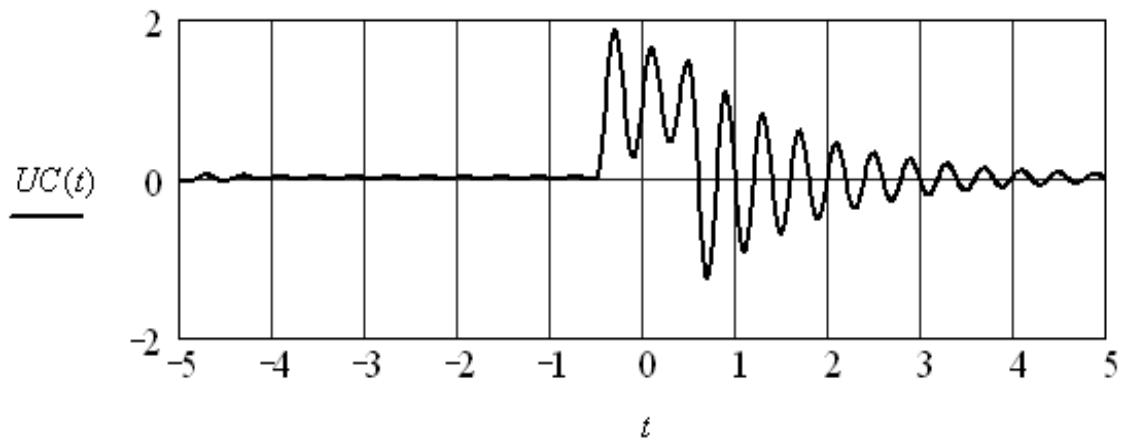
$$UL(t) := A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t))$$



Напряжение на конденсаторе:

$$A_n := \operatorname{Re}(I_n \cdot Z_C(n \cdot \omega)) \qquad B_n := -\operatorname{Im}(I_n \cdot Z_C(n \cdot \omega)) \qquad A_0 := a_0$$

$$UC(t) := A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t))$$



Обратите внимание, что напряжения на катушке и конденсаторе меняются в противофазе (максимум одного соответствует минимуму другого).