

4. Геометрическая оптика

Задача о распространении световых лучей в оптически неоднородных средах может быть решена различными способами. В данном разделе используется подход, основанный на прямой оптико-механической аналогии, который базируется на формальном отождествлении линии светового луча и траектории движения некоторой частицы.

Если показатель преломления является непрерывной функцией координат, соответствующая кривая находится как решение некоторого дифференциального уравнения. Для оптически неоднородных сред, составленных из отдельных элементов, когда зависимость показателя преломления от координат описывается кусочно-постоянной функцией, эта «световая траектория» является ломаной линией. При этом прохождение границы раздела реализуется по стандартному закону преломления. К таким системам, например, относится линза конечной толщины.

Рассмотрим общие принципы оптико-механической аналогии для световой траектории. В произвольной декартовой системе координат любую кривую можно задать в виде трех независимых функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ от некоторой переменной t . В качестве переменной t удобно выбрать длину этой кривой, отсчитываемую от начальной точки. Обозначим вектор касательной в произвольной точке кривой через $\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z)$. Тогда $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$, причем модуль этого вектора тождественно равен единице.

Используем явную аналогию этих выражений с определением скорости материальной точки. Будем считать, что данная кривая есть траектория частицы, движущейся со скоростью, равной по модулю единице. При этом в любой системе единиц длина траектории будет численно совпадать со временем ее прохождения, а формула для $\vec{v}(t)$ есть классическая формула для скорости. В частности, если длина траектории отсчитывается в метрах, она численно равна времени ее прохождения в секундах, при этом модуль скорости равен 1 м/сек.

Из принципа Ферма, или в рамках приближения геометрической оптики для волнового уравнения, можно получить дифференциальное уравнение траектории светового луча в среде с переменным показателем преломления $n(x, y, z)$ для случая, когда градиент показателя преломления всюду определен и конечен:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{n} [\vec{\nabla}n - \vec{v}(\vec{\nabla}n \cdot \vec{v})]. \quad (4.1)$$

По форме это уравнение эквивалентно уравнению движения частицы в механике, причем правая часть в данном случае играет роль силы, которая здесь всегда перпендикулярна вектору «скорости» и сохраняет модуль «скорости» равным единице. Очевидно, уравнение (4.1) может быть решено теми же методами, что и обычное уравнение движения частицы (см. раздел 1).

Рассмотрим в рамках такого подхода прохождение светового луча через границу раздела двух сред с различными показателями преломления. Для этого необходимо на границе раздела ввести промежуточный слой, в котором показатель преломления непрерывно изменяется от одного значения до другого (рис. 4.1). Толщина слоя не имеет значения, так как в задаче нет другого параметра размерности длины, и, следовательно, толщина слоя не может повлиять на величину безразмерного преломленного угла.

Можно доказать, что вне зависимости от вида функции $n(y)$ в пределах слоя, на его границах выполняется закон преломления $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$.

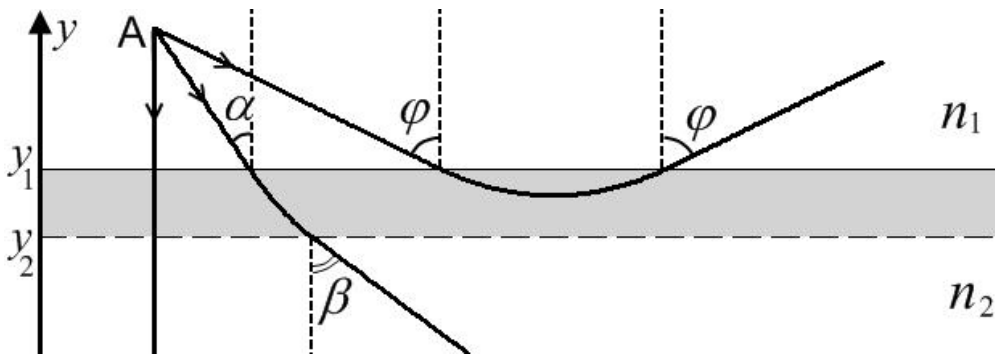


Рис. 4.1. Прохождение световых лучей через плавную границу раздела двух сред (выделена цветом) для случая $n_1 > n_2$. При этом $n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$

На рисунке 4.1 приведены компьютерные расчеты для случая падения света из стекла в воздух и линейной зависимости показателя преломления n в слое от вертикальной координаты y , а именно:

$$n(y) = n_1 + (n_2 - n_1) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.2)$$

В уравнении (4.2) y_1 и y_2 – координаты верхней и нижней границ раздела соответственно. Градиент показателя преломления равен нулю вне слоя и равен вектору $(0, (n_2 - n_1)/(y_2 - y_1), 0)$ в пределах слоя. При $n_1 > n_2$ он направлен вертикально вверх.

Для решения ОДУ в данном случае выберем не функцию **odesolve**, а один из альтернативных методов, предоставляемых пакетом MathCad, например, **Bulstoer** (метод Bulirsch-Stoer). Метод записывается более громоздко, но в общем случае дает дополнительные преимущества. Окончательно, решение можно представить в виде:

ORIGIN:=1

n1:=1.5 n2:=1 a:=10 N:=500 b:=(n1-n2)/a α:=30·(π/180)

$$n(x,y) := \begin{cases} n1 & \text{if } y > a \\ n2 & \text{if } y \leq 0 \\ (n2 + b \cdot y) & \text{if } 0 < y \leq a \end{cases} \quad dn(x,y) := \text{if}(0 < y \leq a, b, 0)$$

$$ax(x, Vx, y, Vy) := \frac{-Vx \cdot (Vy \cdot dn(x, y))}{n(x, y)}$$

$$ay(x, Vx, y, Vy) := \frac{dn(x, y) - Vy \cdot (Vy \cdot dn(x, y))}{n(x, y)}$$

$$D(t, z) := \begin{pmatrix} z_2 \\ ax(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ z_4 \\ ay(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{pmatrix} \quad zzz := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha) \\ 20 \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$U := \text{Bulstoer}(zzz, 0, 100, N, D) \quad X := U^{\langle 2 \rangle} \quad Y := U^{\langle 4 \rangle}$$

Вызов метода решения ОДУ содержится в последней строке, а результат решения записывается в матрицу U. Вектора X, Y содержат координаты найденной траектории (x_i, y_i) . Параметрами метода являются: вектор начальных данных zzz, начальное и конечное значения t, число шагов N и вектор правой части уравнений D. При этом предполагается, что система уравнений записывается в виде:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \vec{D}(t, \vec{z}).$$

Результат работы программы соответствует средней траектории на

рис. 4.1.

С помощью уравнения световой траектории можно также рассчитывать параметры миражей при различных атмосферных условиях. Рассмотрим один из возможных вариантов появления верхнего миража. В этом случае луч от предмета сначала идет вверх под небольшим углом к поверхности, а затем искривляется в сторону земли, и наблюдатель видит мнимое изображение предмета «висящим в воздухе».

В силу того, что градиент показателя преломления воздуха ничтожно мал (а именно он определяет «силу», искривляющую траекторию к земле), необходимо выбирать распределение показателя преломления по типу тонкого слоя, внутри которого, во-первых, градиент n максимален, а, во-вторых, проходит большая часть световой траектории. Поэтому модель, приводимая в ряде пособий, с линейным убыванием показателя преломления с высотой y по закону $n = n_0 - gy$, где $n_0 = 1.0004$, $g = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, оказывается неадекватной. Например, для угла вылета 10° формальное решение действительно дает искривление луча к земле и возвращение его на землю на расстоянии примерно 18 км, но при этом большая часть траектории попадает в зону нефизического значения показателя преломления $n < 1$.

В случае линзы показатель преломления на границах раздела (воздух-стекло) меняется скачком и его градиент бесконечен. Поэтому для нахождения световой траектории придется вводить фиктивный переходный слой на поверхности линзы, толщина которого должна быть много меньше её фокусного расстояния. Альтернативой является метод, напрямую использующий закон преломления.

Будем рассматривать границы оптических элементов как точки, где вектор «скорости» частицы меняется скачком в соответствии с элементарным законом преломления, а там, где показатель преломления постоянен, частица движется прямолинейно и равномерно в соответствии с элементарным уравнением движения. В этой зоне вектор её «скорости» остается постоянным.

Технической задачей является определить, каким образом меняется «скорость» на границах раздела сред. В первую очередь необходимо найти координаты точки пересечения луча с границами раздела сред, которыми в данном случае являются сферические сегменты (границы линзы). Для этого достаточно рассмотреть преломление лучей на шаре в плоскости падения, проходящей через его центр (рис. 4.2).

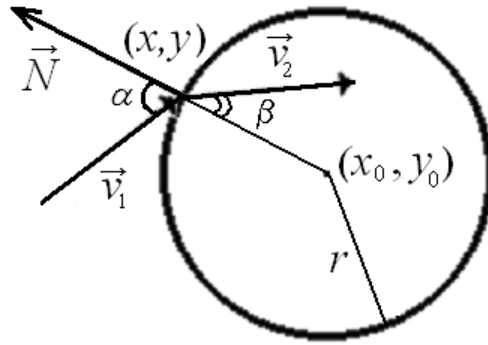


Рис. 4.2. Преломление луча на сферической границе раздела.

Рассмотрим сечение шара в двумерной системе координат (в плоскости XU). На рис. 4.2 \vec{v}_1 и \vec{v}_2 обозначают «скорости» до и после преломления. Уравнение сечения границы шара плоскостью XU (то есть окружности) запишем в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

где (x_0, y_0) – координаты центра шара, r – радиус шара. Чтобы понять, попала ли частица на границу шара, надо проверять это условие для текущей координаты частицы $(x(t), y(t))$ с учетом приближенного характера вычислений.

Если $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$, то частица находится вне шара и продолжает движение со скоростью \vec{v}_1 . Момент времени, когда это условие перестает выполняться, считается моментом пересечения границы шара извне. Предположим, что приближенные координаты точки пересечения (x, y) найдены, следующим шагом является определение новых компонент вектора скорости в результате преломления.

Введем двумерный вектор нормали к границе раздела в точке падения $\vec{N} = (N_x, N_y)$. Этот вектор направлен наружу по линии, проведенной из центра шара к точке пересечения луча с границей шара.

$$N_x = \frac{(x - x_0)}{r_1}; \quad N_y = \frac{(y - y_0)}{r_1}, \quad (4.3)$$

где $(r_1)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, причем r_1 было бы равно радиусу r , если бы точка пересечения (x, y) находилась точно на границе шара (но из-за приближенности вычислений это не так).

Зная, таким образом, значения компоненты вектора нормали (4.3), нетрудно найти угол падения α . Фактически нас интересует не сам угол падения, а функция $\sin(\alpha)$. Используем для этого скалярное

произведение вектора скорости (до преломления) \vec{v}_1 и вектора нормали. В декартовых компонентах имеем: $|N_x v_{1x} + N_y v_{1y}| = \cos(\alpha)$, очевидно

$$(\sin(\alpha))^2 = 1 - (\vec{N} \cdot \vec{v}_1)^2 = 1 - (N_x v_{1x} + N_y v_{1y})^2. \quad (4.4)$$

В этой формуле мы явно учли, что модули векторов равны единице.

Для угла преломления, согласно общему закону преломления, имеем: $\sin(\beta) = (n_1/n_2)\sin(\alpha)$. Здесь n_1 – показатель преломления среды, n_2 – показатель преломления внутри шара (см. рис. 4.2).

Осталось получить явные выражения для декартовых компонент вектора скорости после преломления $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$. Разложим этот вектор на две взаимно перпендикулярные компоненты: параллельную нормали \vec{N} и параллельную касательной $\vec{\tau}$ к границе раздела в точке падения: $\vec{v}_2 = \vec{v}_N + \vec{v}_\tau = v_N \vec{N} + v_\tau \vec{\tau}$, так, как указано на рисунке 4.3.

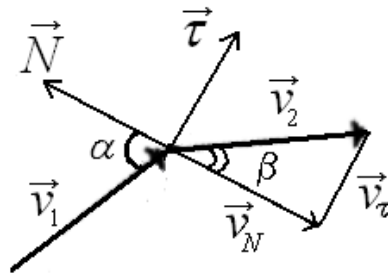


Рис. 4.3. Преобразование скорости на границе раздела ($\vec{\tau} \perp \vec{N}$)

В данном случае единичный вектор касательной можно выбрать в виде $\vec{\tau} = \pm(N_y, -N_x)$; очевидно, он перпендикулярен вектору нормали $\vec{N} = (N_x, N_y)$.

Из рис. 4.3 очевидно: $|v_N| = \cos(\beta)$, $|v_\tau| = \sin(\beta)$. Осталось разобраться со знаками проекций скорости \vec{v}_2 на нормаль и касательную. Из рисунка 4.3 также видно, что знаки проекций на нормаль и касательную у векторов скорости до и после преломления одинаковы. Следовательно, знак у v_N необходимо выбрать таким же, как у скалярного произведения (\vec{N}, \vec{v}_1) , а у v_τ – как у скалярного произведения $(\vec{\tau}, \vec{v}_1)$. С учетом этого для декартовых компонент вектора v_2 имеем:

$$v_{2x} = N_x v_N + N_y v_\tau, \quad v_{2y} = N_y v_N - N_x v_\tau. \quad (4.5)$$

После преломления частица будет двигаться прямолинейно и

равномерно с этой скоростью, причем начальной точкой движения становится найденная выше точка пересечения (x, y) . Повторяя этот алгоритм последовательно для всех границ раздела, которые пересекает световой луч, мы получим искомую траекторию луча.

Применим этот алгоритм к задаче построения изображения в «толстой» симметричной линзе (рис. 4.4). Поместим начало координат в центр линзы таким образом, чтобы ось X являлась оптической осью. Результат работы программы представлен на рис. 4.4. Предмет находится слева и обозначен сплошной линией. Приблизительное место расположения изображения обозначено пунктиром. Видно, что из-за сферической аберрации лучи после прохождения через линзу не собираются в одной точке.

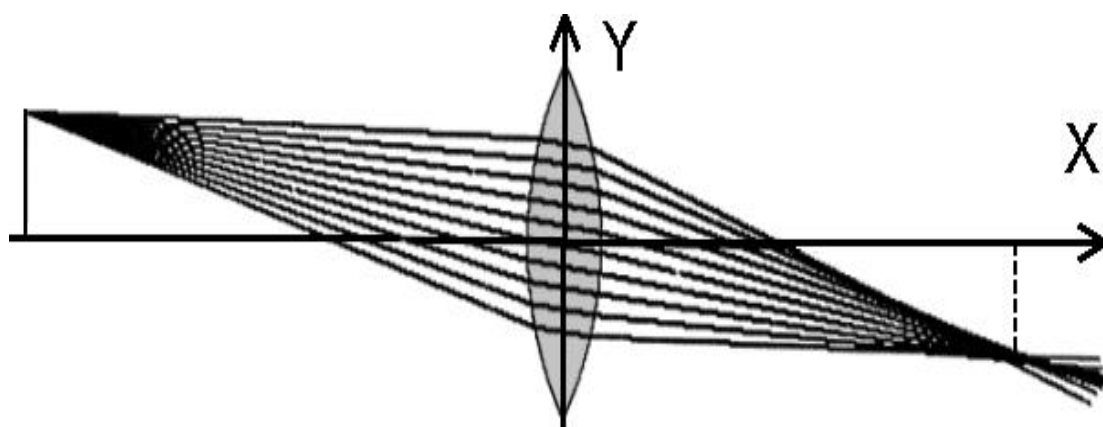


Рис. 4.4. Прямое построение хода лучей в линзе на основе закона преломления

Рассмотрим подробно структуру программы, основанной на рассмотренном выше алгоритме.

Преломление на границе раздела удобно оформить в виде отдельной подпрограммы:

```

1. procedure prelom(nx,ny,n1,n2:real;var vx,vy:real);
2. var sa,sb,vt,vn:real;
3. begin
4. sa:=sqrt(1 - (nx*vx+ny*vy)*(nx*vx+ny*vy));
5. sb:=n1*sa/n2;
6. vt:=sb;
7. vn:=sqrt(1 - sb*sb);
8. if (vx*nx + vy*ny)<0 then vn:= - vn;
9. if (vx*ny - vy*nx)<0 then vt:= - vt;
10. vx:=vn*nx + vt*ny;
11. vy:=vn*ny - vt*nx;
12. end;
```

Параметрами, передаваемыми в эту подпрограмму, являются: декартовы компоненты нормали к поверхности в точке падения n_x, n_y , показатели преломления первой и второй среды n_1, n_2 , а также компоненты вектора «скорости» v_x, v_y . Последние величины являются параметрами-переменными, так как они изменяются в подпрограмме. Переменная sa – это синус угла падения (см. формулу (4.4)), а sb – синус угла преломления. Подпрограмма возвращает в основную программу новые компоненты вектора «скорости» v_x, v_y (по формуле (4.5)), определяющие направление луча после преломления.

Отметим строки 8, 9, в которых выбирается правильный знак проекций нового вектора «скорости» на нормаль и касательную. Как отмечалось выше, знак у v_N (то есть у v_n) необходимо выбрать таким же, как у скалярного произведения (\vec{N}, \vec{v}_1) , а у v_t (у v_t) – как у скалярного произведения (\vec{t}, \vec{v}_1) .

В этой подпрограмме рассматривается только преломление, её можно дополнить, чтобы учесть возможность полного внутреннего отражения. Для этого (см. (1.6)) следует добавить строки типа

```
if sb>1 then
begin Nv:=vx*nx + vy*ny; vx:=vx - 2*nx*Nv; vy:=vy - 2*ny*Nv; end;
```

Рассмотрим структуру основной части программы, в которой опущены очевидные фрагменты, включающие задание необходимых параметров и построение линзы.

1. BEGIN

.....

Задание необходимых параметров. Построение линзы

.....

2. for m:=1 to 10 do begin
3. x:=-290; y:=50;
4. vx:=cos(0.03*m); vy:= -sin(0.03*m);
5. t:=0; z:=1;
6. while t<600 do begin
7. x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt;
8. t:=t+dt;
9. putpixel(300+round(x),200-round(y),15);
10. if x<0 then L:=sqr(x1-x)+sqr(y1-y)
11. else L:=sqr(x2-x)+sqr(y2-y);
12. if (x<0) and (z*(L-R*R)<0) then begin
13. z:= -z;
14. L1:=sqrt(L);
15. nx:=(x-x1)/L1; ny:=(y-y1)/L1;


```

16.  prelom(nx,ny,n1,n2,vx,vy);
17.  end;
18.  if (x>0) and (z*(L-R*R)<0) then begin
19.    z:= -z;
20.    L1:=sqrt(L);
21.    nx:=(x-x2)/L1; ny:=(y-y2)/L1;
22.    prelom(nx,ny,n2,n1,vx,vy);
23.  end;
24.  end;
25.  end;
26.  readkey; closegraph; END.

```

В программе производится построение 10 световых траекторий, стартующих из одной и той же точки, координаты которой заданы в строке 3. Лучи выходят из неё веером под разными углами, определяющими начальные направления вектора «скорости», – строка 4.

Построение одной световой траектории производится в цикле по переменной t , строки 6 – 24. Строка 7 соответствует прямолинейному равномерному движению с текущей скоростью. Изменение скорости происходит два раза: сначала при пересечении первой (левой), а затем второй сферических поверхностей линзы.

В строках 10, 11 определяется квадрат текущего расстояния до центра сферы, задающей ближайшую (первую или вторую) поверхность линзы. Момент пересечения первой (левой) поверхности и преломление на ней происходит в строках 12 – 17.

Рассмотрим подробно условие в строке 12. Прежде всего, левая поверхность линзы находится в области $x < 0$. С хорошей точностью, первая точка, попавшая внутрь линзы, считается точкой пересечения границы. Очевидно, квадрат расстояния от неё до центра левой сферической поверхности становится меньше квадрата радиуса. Казалось бы, для этого достаточно написать условие $(L - R * R) < 0$. Однако такое условие выполнялось бы для всех точек траектории внутри линзы.

Чтобы условный оператор в строке 12 выполнялся только один раз, в программе используется вспомогательная переменная z (индикатор среды), причем $z = 1$ вне линзы и $z := -1$ внутри линзы. Теперь условие имеет вид $z * (L - R * R) < 0$, причем при первом обращении индикатор $z = 1$, но после выполнения условия в строке 12 индикатор сразу меняет знак (строка 13). После этого условие в строке 12 очевидно больше никогда не выполнится. Таким образом, преломление в строке 16 выполнится только один раз.

Аналогичным образом происходит однократное преломление на второй (правой) границе раздела в строках 18 – 23.

Теперь применим тот же алгоритм к задаче о рассеянии параллельного светового пучка произвольной системой шаров (рис. 4.5).

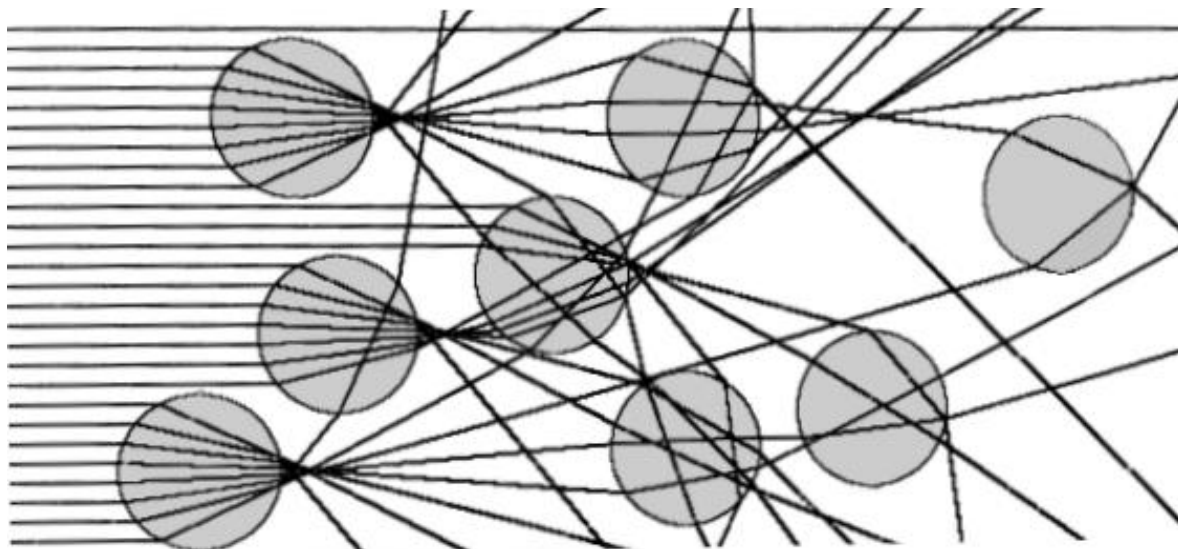


Рис. 4.5. Рассеяние параллельного светового пучка системой стеклянных шаров. В данном случае центры шаров лежат в одной плоскости.

Для преломления лучей используется та же подпрограмма `prerom`. Рассмотрим структуру основной части программы, описывающей прохождение параллельного пучка лучей, распространяющихся вдоль оси X.

1. BEGIN
.....
Задание координат центров шаров и других параметров.
Построение шаров
.....
2. for m:=1 to N do { N – число лучей}
3. begin
4. x:=0; y:=45+10*m; vx:=1; vy:=0; t:=0;
5. for i:=1 to 8 do z[i]:=1;
6. while t<800 do
7. begin
8. x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt;
9. t:=t+dt;
10. putpixel(round(x), round(y),15);
11. for i:=1 to 8 do

```

12. begin
13. L:=sqr(x0[ i ] - x) + sqr(y0[ i ] - y);
14.   if z[ i ]*(L - R*R)<0 then
15.     begin
16.       L1:=sqrt(L);
17.       nx:=(x - x0[ i ])/L1;
18.       ny:=(y - y0[ i ])/L1;
19.       n1:=1.5; n2:=1;
20.       if z[ i ]>0 then begin n1:=1; n2:=1.5; end;
21.       prelom(nx,ny,n1,n2,vx,vy);
22.       z[ i ]:= - z[ i ];
23.     end;
24.   end;
25. end;
26. end;
27. readln; closegraph; END.

```

Проверка на пересечение световым лучом границы раздела происходит в строке 14. В отличие от предыдущей программы, вместо одного индикатора среды (переменная z) здесь используется набор индикаторов $z[i]$ для каждого шара отдельно. При этом значения показателей преломления для падающего и преломлённого лучей зависят от текущего значения $z[i]$ – строки 19, 20.