

6. Моделирование волновых явлений

Волновое уравнение

Волны представляют из себя особый вид коллективного движения материи, характеризующийся изменением со временем пространственного чередования максимумов и минимумов некоторой физической величины (давления, электрического поля, температуры). Можно также сказать, что волна – это распространяющееся в пространстве возмущение определённой физической величины.

Независимо от природы волны, перенос энергии осуществляется без переноса вещества; последнее может возникнуть лишь как побочный эффект. Перенос энергии – принципиальное отличие волн от колебаний, в которых происходят лишь «местные» преобразования энергии. Волны же, как правило, способны удаляться на значительные расстояния от места своего возникновения.

Основой математического описания любого вида волн является волновая функция, аргументами которой являются время и пространственные координаты. Волновая функция однозначно определяет, как изменяется во времени и пространстве распределение физической величины, характеризующей волну данного типа. При этом математическая структура самой волновой функции может быть различной. Например, это может быть скалярная функция четырех переменных $F(x, y, z, t)$ для описания распространения акустических волн в жидкостях и газах, векторнозначная функция для описания волн в кристаллах или пара векторов для описания электромагнитных волн и т.д.

Уравнение, которому подчиняется волновая функция, называется волновым уравнением. По своему смыслу оно должно, по заданным начальным условиям и для заданных физических параметров среды, однозначно предсказать волновую функцию в последующие моменты времени, то есть описать распространение интересующей нас волны. Каноническая форма волнового уравнения в самом простом случае имеет вид:

$$m(\vec{r}) \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta u(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t), \quad (6.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Правая часть (6.1) является заданной функцией, которую можно назвать «источником» волны.

Прямой способ решения волнового уравнения основан на применении численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных. Однако с методической точки зрения более целесообразно использовать подход, основанный на замене модели сплошной среды эквивалентной (в пределе нулевой постоянной решётки) дискретной решёточной моделью. При этом обычно используется связь волнового уравнения и системы уравнений движения точек упругой решетки, которая реализуется в пределе больших длин волн. Проиллюстрируем этот подход на примере одномерного волнового уравнения (уравнения (6.1)) с заменой лапласиана Δ на $\partial^2/\partial x^2$.

Одномерная дискретная модель волновой среды

Рассмотрим N связанных осцилляторов, то есть цепочку из точечных масс, соединённых пружинами. Известно, что колебания отдельных точек приводят к распространению энергии вдоль всей цепочки, что указывает на аналогию между колебаниями такой цепочки и волнами, распространяющимися в непрерывных средах.

Чтобы подтвердить это, продемонстрируем переход от уравнений движения одномерной упругой цепочки к волновому уравнению непрерывной среды. Пусть цепочка состоит из точечных частиц массой m_i (в общем случае массы разные), связанных пружинами одинаковой жесткости k . Частицы расположены вдоль оси X и пронумерованы индексом i по возрастанию, а их координаты обозначаются через x_i .

При написании уравнений движения удобно перейти от координат колеблющихся тел к их смещениям из положений равновесия. Обозначим через $u_i(t)$ смещение i -го тела от положения равновесия. Смещение тела определим формулой

$$u_i(t) = x_i(t) - x_{0i} = x_i(t) - i \cdot a - x_0. \quad (6.2)$$

Предполагается, что в положении равновесия все частицы расположены на одинаковом расстоянии a друг от друга, в таком состоянии все смещения тождественно равны нулю. Параметр a можно назвать постоянной решетки.

Сила, действующая на частицу со стороны правого соседа, равна

$$F_{i,i+1} = k(x_{i+1} - x_i - a) = k(u_{i+1} - u_i), \quad (6.3)$$

аналогично, сила, действующая со стороны левого соседа, равна

$$F_{i-1,i} = k(x_{i-1} - x_i + a) = k(u_{i-1} - u_i). \quad (6.4)$$

Складывая эти силы, получаем уравнение движения i -той частицы:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} u_i(t) = -k \cdot (2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}). \quad (6.5)$$

При $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ и постоянной длине цепочки можно заменить в (6.5) $u_i(t)$, где i – дискретная переменная, на функцию $u(x,t)$, где x – непрерывная переменная. Данная замена позволяет записать (6.5) в следующем виде:

$$m(x) \frac{d^2}{dt^2} u(x,t) = -k \cdot (2u(x,t) - u(x+a,t) - u(x-a,t)) \quad (6.6)$$

Разложим функцию $u(x,t)$ в ряд Тэйлора в точках $x \pm a$:

$$u(x \pm a, t) = u(x, t) \pm a \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \dots$$

и подставим в (6.6), с точностью до членов порядка a^4 , получим:

$$m(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = ka^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t). \quad (6.7)$$

Если дополнительно учесть внешнюю силу, действующую на частицы цепочки, то в правой части уравнения движения (6.5) добавится слагаемое $F_i(t)$. Соответственно, в правую часть уравнения (6.7) следует добавить слагаемое $F(x,t)$. Получившееся уравнение будет одномерным волновым уравнением для неоднородной среды.

$$m(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - ka^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = F(x, t). \quad (6.8)$$

Для однородной среды в отсутствие функции источника получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - v^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0, \quad (6.9)$$

где $v^2 = a^2 k / m$ (v – скоростью распространения волн).

Нетрудно убедиться, что любые функции вида $f(x-vt)$, $g(x+vt)$ являются решениями уравнения (6.9), при этом параметр v оказывается скоростью распространения волны. Для этого достаточно рассмотреть эволюцию графика зависимости функции $f(x-vt)$ от x при фиксированном t . Очевидно, график функции $f(x-v(t+\Delta t))$ будет отличаться от исходного сдвигом на $v\Delta t$ вдоль оси X . То есть с течением времени график функции f будет двигаться вправо с постоянной скоростью, равной v .

Поскольку уравнение (6.9) является линейным по отношению к неизвестной функции $u(x,t)$, для построения общего решения можно использовать принцип суперпозиции и записать его в виде

$$u(x,t) = \sum_i [f_i(x-vt) + g_i(x+vt)]. \quad (6.10)$$

В частности, поведение волны произвольной формы можно описать, представляя ее в виде набора синусоидальных волн (ряда Фурье). Данный подход может быть использован для исследования распространения волновых пакетов в среде с дисперсией.

Моделирование распространения волн в одномерной упругой цепочке

Исходные уравнения движения представляют собой систему обычных дифференциальных уравнений и могут быть решены теми же способами, что и уравнения главы 1.

Рассмотрим, в качестве примера программу, демонстрирующую явление отражения от границ и прохождения волн через границу раздела двух сред с разными скоростями распространения. В данной задаче моделируется одномерная упругая цепочка, граничные атомы которой жестко закреплены, а жесткость пружин в левой половине цепочки больше, чем в правой. Массы всех атомов одинаковы.

Для решения уравнений движения используем самый простой и самый быстрый метод – метод Эйлера-Кромера. Основная часть программы имеет вид

```

1. BEGIN
2. InitGraph(dr, md, "");
3. Setcolor(10); line(0,200,600,200);
4. outtextXY(250,10,'1'); outtextXY(350,10,'2');
5. dt:=0.01; A:=100.; d:=15.;xm:=50;
6. N:=200;
7. N2:=round(0.5*N); line(3*N2+1,0,3*N2+1,400);
8. for i:=1 to N2 do begin { начальные условия }
9. u[i]:= A*exp( -(xm-i)*(xm-i)/(d*d)); { u(x,0) }
10. vx[i]:= -2*(xm-i)/(d*d)*u[i]; { vx(x,0) }
11. end;
12. for i:=1 to N do line(3*i,200-round(u[i]),3*i,200);
13. readkey;
14. setcolor(0); for i:=1 to N do line(3*i,200-round(u[i]),3*i,200);
15. a1:=1; a2:=1/4;
16. while not keypressed do

```

```

17. begin
18. for i1:=1 to 100 do begin
19. u[N+1]:=0; u[0]:=0;                                {граничные условия}
20. for i:=1 to N2 do begin
21. ax[i]:= - a1*(2*u[i] - u[i-1] - u[i+1]);
22. end;
23. for i:=N2+1 to N do begin
24. ax[i]:= - a2*(2*u[i] - u[i-1] - u[i+1]);
25. end;
26. for i:=1 to N do begin
27. vx[i]:=vx[i]+ax[i]*dt;
28. u[i]:=u[i]+vx[i]*dt;
29. end;
30. end;
31. for i:=1 to N do begin                                {рисование новых смещений}
32. x1:=round(u[i]);
33. setcolor(0); line(3*(i),200-x1,3*(i),200-x2[i]);
34. setcolor(11); line(3*i,200-x1,3*i,200);
35. x2[i]:=x1;
36. end;
37. end;
38. readkey; closegraph; END.

```

Количество атомов в цепочке равно 200 (строка 6). В строках 8–11 задаются начальные смещения и скорости атомов. Они формируют дискретный аналог гауссова волнового пакета, который начинает двигаться слева направо из левой части цепочки в сторону границы раздела: $u(x,t) = A \cdot \exp(-(x-v_1 t - x_{\max})^2/d^2)$. Отсюда для начальных скоростей атомов получаем $v(x,0) = -2(x-x_{\max})v_1 d^{-2} \cdot u(x,0)$. В программе скорость волны в левой части цепочки равна 1, то есть $v_1=1$.

Вычисленные значения смещений изображаются на экране в виде вертикальных линий, отложенных в точках расположения атомов (строки 31–36). При рисовании новых смещений старые значения смещений стираются – строка 33. В результате мы видим непосредственное движение волны на экране. Для ускорения этого движения новые смещения на экране рисуются после 100 шагов метода Эйлера (строки 18–30). То есть один шаг на экране – это $(100 \cdot dt \cdot v_i)$ пикселей.

Результат работы программы до и после пересечения границы раздела показан на рисунках 6.1, 6.2.

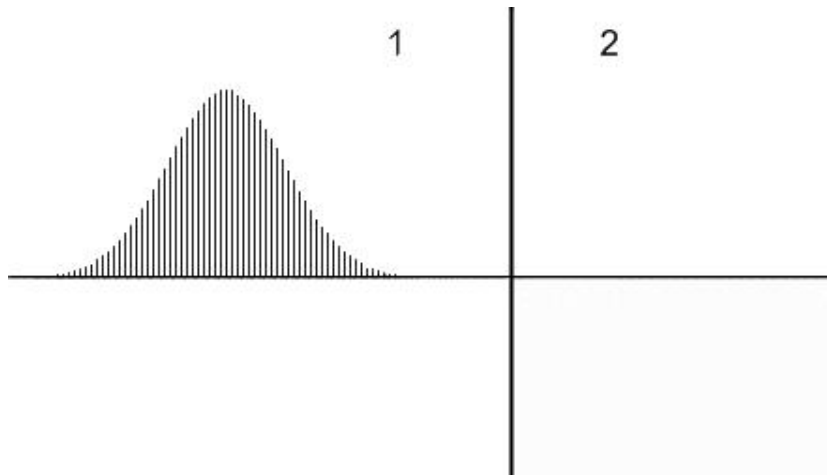


Рис. 6.1. Волновой пакет, движущийся слева направо на границу раздела двух сред (вертикальная линия) с разными скоростями распространения

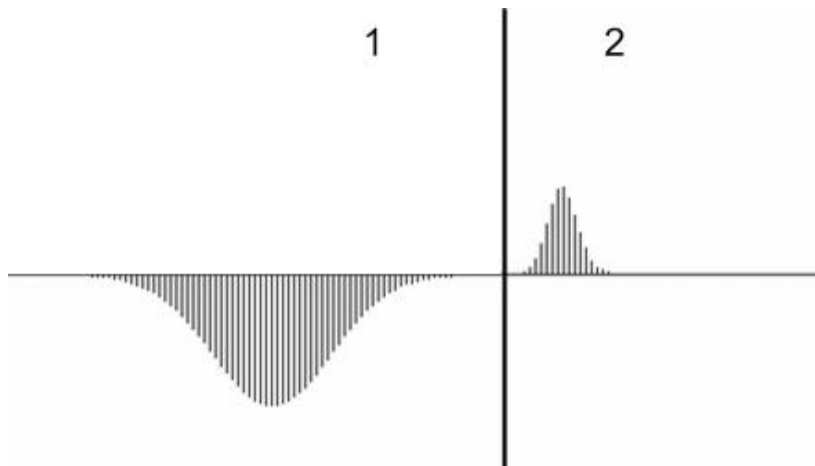


Рис. 6.2. Разделение волнового пакета после контакта с границей раздела. Перевернутый вниз график – отраженная волна (движется справа налево). Справа от границы – прошедшая волна, её скорость и ширина пакета меньше

Скорость распространения волны в правой части цепочки определяется параметрами строки 15. В данном случае она в два раза меньше чем в левой части ($v_1=1$, $v_2=0.5$), поэтому ширина волнового пакета справа меньше (и он движется медленнее).

Интерференция. Моделирование с помощью точных решений

Построение интерференционной или дифракционной картины во многих случаях можно свести (на основе принципа Гюйгенса-Френеля) к суперпозиции решений волнового уравнения, порождаемых набором элементарных источников с заданным пространственным расположением. Конкретный вид используемых

элементарных решений волнового уравнения определяется условиями задачи.

Для источников произвольной формы используют разбиение на решетку точек, каждая из которых порождает сферическую волну

$$E(r, t) = \frac{A}{r} \cos(pr - \omega t + \varphi), \quad (6.11)$$

где r – расстояние от центра волны (источника), $p = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны. Множитель $1/r$ непосредственно связан с законом сохранения энергии (полный поток энергии через сферу, охватывающую источник, сохраняется).

Результирующую волну находят по принципу суперпозиции

$$E(t, \vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{A}{|\vec{r} - \vec{R}_i|} \cos(p|\vec{r} - \vec{R}_i| - \omega t). \quad (6.12)$$

Суммирование идет по всем точкам решетки (имеющим радиус вектора \vec{R}_i), причем их число может быть бесконечным, \vec{r} – радиус-вектор точки наблюдения.

Для источников типа набора щелей используются цилиндрические волны, при этом щели аппроксимируют набором одномерных линейных источников, каждому из которых соответствует слагаемое в сумме для результирующей волны типа (6.12).

Применим этот подход к построению интерференционной картины от двух щелей. Под интерференцией обычно понимают сложение волн, приходящих по отдельности от одного и того же источника, либо волн, испущенных несколькими когерентными источниками. Классический пример – опыт Юнга с двойной щелью. Фактически, в таких задачах нас интересует пространственное распределение интенсивности света на экране – интерференционная картина.

В общем случае интенсивность определяется через средний по времени модуль вектора плотности потока энергии. Для монохроматических волн эта величина прямо связана с плотностью энергии, которая пропорциональна квадрату волновой функции. Для электромагнитных волн интенсивность монохроматической волны равна среднему по периоду модулю вектора Пойнтинга $[\vec{E} \times \vec{H}]$. Можно показать, что эта величина пропорциональна среднему квадрату напряженности электрического поля.

Для упрощения расчетов будем рассматривать интерференцию скалярных волн. Наблюдаемая интенсивность $I(r)$ монохроматической результирующей волны с волновой функцией $E(r, t)$ в этом случае определяется формулой типа

$$I(\vec{r}) = \langle E^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (E(\vec{r}, t))^2 dt, \quad (6.13)$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по времени (по периоду волны).

Для произвольного набора щелей результирующее поле определяется суммой цилиндрических волн, причем на больших расстояниях (много больших длины волны) эта сумма представима в виде:

$$E(t, \vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{A}{\sqrt{r_i}} \sin(pr_i - \omega t + \varphi), \quad (6.14)$$

где r_i – расстояние от i -той щели до точки наблюдения, ($r_i \gg \lambda$).

Для двух щелей естественно расположить источники симметрично относительно начала координат и параллельно оси Z , а экран – перпендикулярно оси X на расстоянии L от источников, как показано на рис. 6.3.

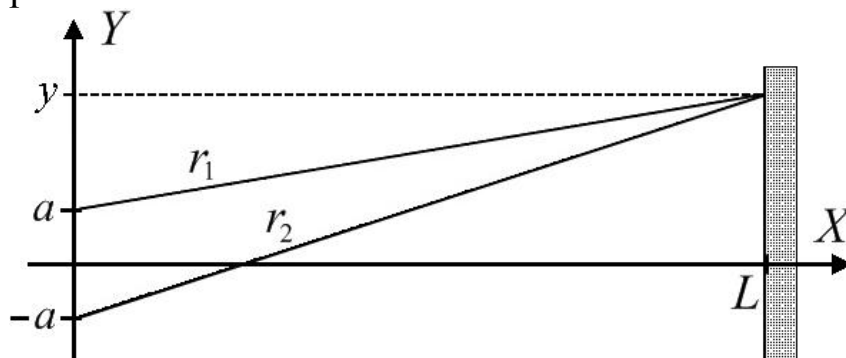


Рис. 6.3. Схема получения интерференционной картины от двух щелей

Вычисление интенсивности в этом случае проще всего провести с использованием пакета MathCAD. При этом для небольшого числа источников можно записывать формулы в документе MathCAD практически в той же форме, в какой они присутствуют в тексте. В общем случае, для ускорения работы программы, целесообразно предварительно явно вычислить интеграл по времени в формуле (6.13), что можно сделать без особых проблем.

Соответствующий данной геометрии источников (рис. 6.3) документ MathCAD может быть оформлен в следующем виде:

$$a:=0.0001 \quad \omega:=1 \quad \lambda:=5 \cdot 10^{-7} \quad L:=1$$

$$A:=1 \quad d1:=\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad d2:=\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad p:=\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad T:=\frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

$$r1(x, y) := \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - d1 \right| \quad r2(x, y) := \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - d2 \right|$$

$$E(x, y, t) := \frac{A}{\sqrt{r1(x, y)}} \sin(p \cdot r1(x, y) - \omega \cdot t) + \frac{A}{\sqrt{r2(x, y)}} \sin(p \cdot r2(x, y) - \omega \cdot t)$$

$$I(L, y) = \frac{1}{T} \int_0^T (E(L, y, t))^2 dt$$

Обозначения и последовательность действий в документе очевидны (см. формулу (6.14)). Все величины размерности длины даны в метрах. Интеграл для интенсивности не зависит от конкретного значения частоты, которая выбрана равной единице. Результат вычислений в виде графика зависимости относительной интенсивности от поперечной координаты представлен на рис.6.4(а).

Теоретическое значение периода интерференционной картины в данном случае определяется известной формулой $\Delta y := L \frac{\lambda}{2a}$. Для выбранных параметров $\Delta y = 0.0025$.

Для наглядности можно также осуществить визуализацию интерференционной картины в виде монохромного рисунка (рис. 6.4(б)), на котором максимумам интенсивности соответствуют белые полосы, а минимумам – черные.

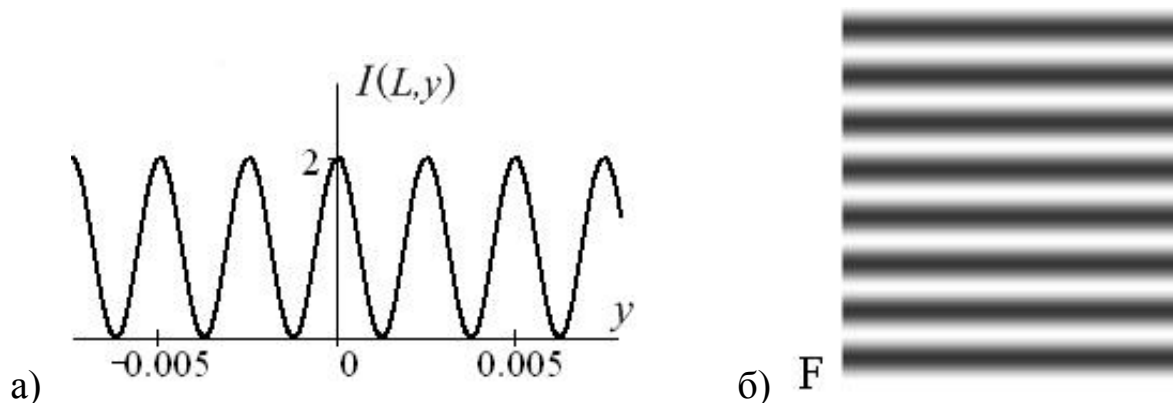


Рис. 6.4. Моделирование интерференционной картины от двух щелей
 а) зависимость интенсивности от y ,
 б) интерференционная картина на удаленном экране

Для построения рис. 6.4(б) следует представить распределение интенсивности по экрану в виде монохромного рисунка (графического BMP файла). На таком рисунке значению интенсивности в каждой точке сопоставляется один из 256 оттенков серого цвета (диапазон от белого до черного). Добавление этого изображения в документ осуществляется как вставка рисунка (picture).

Такой графический файл соответствует матрице, элементами которой являются целые числа (в диапазоне от 0 до 255), сопоставляемые значениям интенсивности на квадратной решетке точек, покрывающих рисунок. Минимальной интенсивности соответствует число 0 (черный цвет), максимальной – число 255 (белый цвет).

При математических преобразованиях такой матрицы необходимо следить за тем, чтобы числовые значения её элементов не выходили за пределы диапазона [0, 255]. В противном случае соответствие между оттенком и значением интенсивности будет нарушено.

Окончательно для визуализации интерференционной картины следует дополнить MathCAD документ следующими строчками:

$$i:=0..400 \quad j:=1..200 \quad h:=0.01 \quad y_i := h \cdot \frac{(i - 200)}{200}$$

$$J_i := 55 + 100 \cdot I(L, y_i)$$

$$F_{i,j} := J_i$$

Матрица $F_{i,j}$ и есть матрица рисунка (см. рис. 6.4(б)). Размер рисунка – 400 точек по вертикали и 200 – по горизонтали. Первый индекс в матрице нумерует строки, то есть индекс i соответствует вертикальной переменной y . Поскольку интерференционная картина инвариантна при сдвиге вдоль оси Z (параллельно щелям), интенсивность не зависит от z , то есть $F_{i,j}$ не зависит от j .

Общий алгоритм построения интерференционной картины:

1. Задать число и расположение источников света, а также явное выражение для элементарной волны от каждого источника.
2. Задать пространственную сетку на экране для построения интерференционной картины.
3. Вычислить интенсивность в точках этой сетки. Интегрирование по времени предпочтительно выполнить заранее в общем виде.